Woonplaats: Groningen | Jaar van eerste inschrijving: 2004 | Naam docent: Eberard

1 a De verzameling $A \subset \mathbb{R}^m$ is meetbaar als ~~als~~ voor iedere $\varepsilon > 0$ ~~er~~ een gesloten verzameling F en een open verzameling O bestaat zodat $F \subset A \subset O$ en er een eindige of aftelbare collectie blokken $\{I_n\}$ bestaat waarvoor geldt $O \setminus F \subset \bigcup I_n$ en $\sum |I_n| \leqslant \varepsilon$.

5

b De rij functies $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ convergeert uniform naar de functie $f : [a,b]$ als ~~a~~ voor iedere $\varepsilon > 0$ ~~geldt: er bestaat een $N > 0$~~
een getal $N > 0$ bestaat waarvoor geldt:

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \;!$$

(dat is nu juist het uniforme!)

5

oftewel

$$n \geqslant N \Rightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

oftewel

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{sup} = 0$$

2 a Een rij functies $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = (4x(1-x))^n$$

noem het deel $(4x(1-x)) = a$.

$a < 1 \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\qquad a > 1 \to f_n(x)$ diverg

$a = 1 \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

los op $(4x(1-x)) = 1$ $\qquad$ Met een schets zie je toch meteen dat $x = \frac{1}{2}$?

$$-4x^2 + 4x = 1$$

$$\cancel{x^2 + x = \tfrac{1}{4}}$$

$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 0$$

$$(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$x = \tfrac{1}{2}$$

~~dus we hebben een kwadratische functie met de top op $(\frac{1}{2}, 0)$~~

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a < 1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

5 $x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a < 1$

~~dan $\lim_{n\to\infty}$~~

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \ \vee \ \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1 & \text{als } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2 b gedomineerde convergentiestelling: Laat $f_n(x)$ een rij van functies zijn van $f_n: X \Rightarrow \mathbb{C}$ en laat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ bijna overal. Als er een functie $g \geq 0$ bestaat op X die voldoet aan $\int_X g(x)dx < \infty$ en $|f_n(x)| \leq g(x)$ voor bijna alle x en voor alle n dan is f integreerbaar en geldt:

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) < \infty$$

~~welnu: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$~~ $X = [a,b]$ en de

welnu: $X = [0,1]$ en $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ bijna overal (immers de verzameling $\{\frac{1}{2}\}$ waarvoor dit niet geldt heeft n-dimensionale maat 0).

5

we definiëren $g(x) = 4x(1-x)$. $g(x) = 1$ voldoet ook ...

1) $\int_0^1 4x(1-x) \ldots < \infty$

2) $g(x) \geq 0$.

3) $|f_n(x)| = |(4x(1-x))^n| \leq 4x(1-x)$ voor alle $x \in [0,1]$ en voor alle n.

en geldt dus $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim \int_0^1 (4x(1-x))^n = \ldots$

Postcode en Woonplaats:

Jaar van eerste inschrijving:

Datum:

Naam docent: Eberard

3 De m-dimensionale maat $|\,|_m$ wordt gedefinieerd door:

$$|I|_m = |I^1| \times |I^2| \times \dots \times |I^m|$$

waar I een m-dimensionaal blok van intervallen is dat:

$$I = I^1 \times I^2 \times \dots \times I^m$$

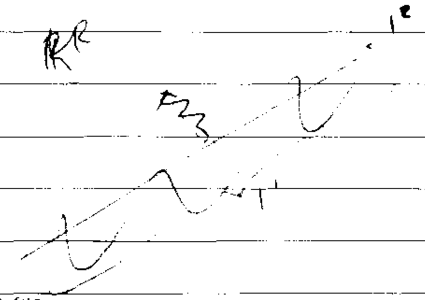
$$= [a_1, b_1 - a_1][b_2 - a_2] \times \dots \times [b_m - a_m]$$

~~in het de tweedimensionale $\mathbb{R}^2$ geldt~~

in $\mathbb{R}^2$ geldt:

$$|I|_2 = |I^1| \times |I^2|$$

~~voor de lijn geldt dat in één van de twee intervallen dimensies slechts een punt~~



neem een dimensie parallel aan en één dimensie loodrecht op de lijn. In de dimensie loodrecht op de lijn is slechts

10 één punt gedefinieerd, de lengte van het interval in die dimensie is 0, dus ~~sprekende~~ wordt de m-dimensionale maat van de lijn in $\mathbb{R}^2$ 0.

4 $\ell^2(\mathbb{N})$ is de verzameling van vectoren $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$ waarvoor geldt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

10 $\ell^2(\mathbb{N})$ is een Hilbertruimte. Het inproduct is als volgt gedefinieerd

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \quad ;$$

5 Laat $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een 2π-periodiek functie zijn die stuksgewijs glad is. Dan zijn de fourierreeksen van f puntsgewijs convergent. De som in x is gelijk aan $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Deze is gelijk aan $f(x)$ als f continu is in x.
~~Boven dien~~ d

10 Bovendien convergeren de fourierreeksen van f ook uniform op een interval $[a,b]$ ~~bestaand~~ $\subset \mathbb{R}$ bestaande uit continuiteitspunten van f.

6 a $f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi]$

$f(x)$ is een even functie dus $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[x^2\,\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2x\,\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\left[2x\cdot\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\,\frac{\cos nx}{n^2}\,dx\right)$$

6 $$= -\frac{2}{\pi}\left(\left[2x\cdot\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^3}\underbrace{\left[\sin nx\right]_0^{\pi}}_{=0}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi\cos n\pi}{n^2}\right) = 4\,\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$R = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

b Volgens Dirichlet geldt voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ dat $R(x) = f(x)$. Immers er is sprake van een

2 2π-periodieke functie f die stuksgewijs glad is
en alle punten van $[-\pi, \pi]$ zijn continuiteitspunten ...

c neem $x = 0$. $\Rightarrow f(x) = 0$ vul dit in in fourierreeks

1 $$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Longrightarrow$$

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam: Geert Reitsma	Studentnummer: 1464337	Bladnr.: ~~II~~ III
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: Egeard

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \cos nx$ convergeert uniform als

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ convergeert als $a \geq 2$ en divergeert

5 als $0 < a < 2$ Nee: divergentie als $0 < a \leq 1$ en nog steeds unif. convergentie als $1 < a \leq 2$

Immers, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < \infty$ voor $a > 1$ (integraalkenmerk)

Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: Naam docent: Eberard

8 Toon aan $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$

neem het kwadraat van deze integraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dy dy =$$ poolcoordinaten gebruiken $(x^2+y^2=r^2)$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r e^{-\pi r^2} d\theta dr =$$

10

$$2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\pi r^2} dr =$$

$$2\pi \left[\frac{r}{-2\pi r} e^{-\pi r^2}\right]_0^{\infty} = 2\pi\left[0 + \frac{1}{2\pi}\right] = 1$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx\right]^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 \qquad q.e.d.$$

9 a $f(x) = e^{-\pi x^2}$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}$$

$$\frac{d}{dy}\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}(-2\pi i x) e^{-2\pi i x y} dx$$

$$= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} dx$$

$$= -2\pi i \left(\frac{-1}{2\pi} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i y}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{2\pi} e^{-\pi x^2}(-2\pi i y) e^{-2\pi i x y} dx\right)$$

$$= (-2\pi i)\left(\frac{-1}{2\pi}\right)(-2\pi i y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} dx$$

$$= \cancel{2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} dx}$$

9 a $f(x) = e^{-\pi x^2}$

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$\frac{d}{dy}\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} (-2\pi i x) e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$= (-2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$= (-2\pi i) \Big(\underbrace{\frac{1}{-2\pi} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} -$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-2\pi} e^{-\pi x^2} (-2\pi i y) e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$= (2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-2\pi} e^{-\pi x^2} (-2\pi i y) e^{-2\pi i x y}\, dx$$

5 $$= -2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx = -2\pi y\, \hat{f}(y)$$

dus: $\frac{d}{dy}\hat{f}(y) = -2\pi y\, \hat{f}(y)$

b bovenstaande differentiaalvgl. oplossen

5 $$\frac{\hat{f}(y)'}{\hat{f}(y)} = -2\pi y$$ primitiveren geeft:

$\log|\hat{f}(y)| = -\pi y^2 + c$ hieruit volgt:

$\hat{f}(y) = e^{-\pi y^2} e^{c}$ dus $e^{c} = d \Rightarrow$

$\hat{f}(y) = d\, e^{-\pi y^2}$

Naam: Geert Reitsma	Studentnummer: 1464357	Bladnr.: V
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: Eberard

q6 vervolg.

$\hat{f}(y) = d\, e^{-\pi y^2}$

$\cancel{\hat{f}(x) = d \quad \hat{f}(y)}$

$\cancel{\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\, dx}$

$\cancel{\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}}$

we moeten nu d bepalen. ~~wel~~ We doen dit door in te vullen $y=0$

$\hat{f}(0) = d e^{-\pi \cdot 0} = d$

$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \cdot 0} dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$ (zie opgave 8)

dus $d = \hat{f}(0) = 1$ en er geldt voor $\hat{f}(y)$:

$\hat{f}(y) = e^{-\pi y^2}$ q.e.d. §